Les Lectures de l'*Habilitationsvortrag* de Riemann par Weyl.

Christophe Eckes

Lille 1

24 mai 2011

Introduction

1.1. La leçon d'habilitation de Riemann : quelques repères.

RIEMANN soutient son *Habilitationsvortrag* (*Hv*) en 1854 sous le titre : « Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen ».

Introduction

1.1. La leçon d'habilitation de Riemann : quelques repères.

RIEMANN soutient son *Habilitationsvortrag* (*Hv*) en 1854 sous le titre : « Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen ».

Elle est éditée à titre posthume en 1868 dans les *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*

Introduction

1.1. La leçon d'habilitation de Riemann : quelques repères.

RIEMANN soutient son *Habilitationsvortrag* (*Hv*) en 1854 sous le titre : « Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen ».

Elle est éditée à titre posthume en 1868 dans les *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*

Les œuvres complètes de RIEMANN sont publiées par DEDEKIND et WEBER

- en 1876 pour la première édition
- en 1892 pour la seconde édition

M. NOETHER et WIRTINGER ajoutent des suppléments en 1902.

1.2. Structure de l'*Habilitationsvortrag*.

Première partie : introduction du concept de grandeur à n dimensions. Distinction variétés *discrètes* / variétés *continues*. Engendrement des variétés.

1.2. Structure de l'*Habilitationsvortrag*.

Première partie : introduction du concept de grandeur à n dimensions. Distinction variétés *discrètes* / variétés *continues*. Engendrement des variétés.

Seconde partie : détermination des rapports métriques sur une variété continue et différentiable.

(i) RIEMANN privilégie les variétés dites « riemanniennes », (caractérisées par une structure euclidienne en chacun de leurs espaces tangents).

(ii) Il généralise le concept de mesure de courbure aux variétés,

(iii) Il s'intéresse aux variétés *homogènes* (à courbure constante).

1.2. Structure de l'*Habilitationsvortrag*.

Première partie : introduction du concept de grandeur à *n* dimensions. Distinction variétés *discrètes* / variétés *continues*. Engendrement des variétés.

Seconde partie : détermination des rapports métriques sur une variété continue et différentiable.

(i) RIEMANN privilégie les variétés dites « riemanniennes », (caractérisées par une structure euclidienne en chacun de leurs espaces tangents).

(ii) Il généralise le concept de mesure de courbure aux variétés,

(iii) Il s'intéresse aux variétés *homogènes* (à courbure constante).

Troisième partie : application à l'espace, formulation d'hypothèses empiriquement testables sur l'espace physique.

1.3. Un texte de référence pour Weyl.

L'*Hv* est abondamment citée et commentée par WEYL entre 1916 et 1923. WEYL participe alors à la mathématisation de la *relativité générale*.

WEYL se réfère à l'*Hv* dans :

- *Raum, Zeit, Materie* (1918 pour la première édition, 1921 pour la quatrième édition)
- « Reine Infinitesimalgeometrie » et « Gravitation und Elektrizität » (1918) : généralisation de la géométrie riemannienne servant de cadre à une *théorie unifiée* des champs gravitationnel et électromagnétique
- « Das Raumproblem » (1922) : preuve de la nature « pythagoricienne » de l'espace dans l'infinitésimal

- Il en propose une édition critique, commentée et annotée en 1919, 1921 et 1923 chez Springer.
- Dans *Philosophie der Mathematik* (1927), il consacre le
  (i) § 12 au point de vue riemannien en géométrie
  (ii) § 18 au problème de l'espace

Il effectue alors une synthèse des réflexions philosophiques sur l'espace élaborées entre 1918 et 1923 dans *Raum, Zeit, Materie* (*RZM*), « Reine Infinitesimalgeometrie » (*RI*) et « Das Raumproblem » (*RP*).

La référence à l'*Hv* intervient dans des textes de statuts différents :

(a) commentaire critique,
(b) articles de recherche,
(c) ouvrage sur la *relativité générale* à destination des mathématiciens *et* des physiciens,
(d) ouvrage de vulgarisation scientifique et philosophique.

La référence à l'*Hv* intervient dans des textes de statuts différents :

(a) commentaire critique,
(b) articles de recherche,
(c) ouvrage sur la *relativité générale* à destination des mathématiciens *et* des physiciens,
(d) ouvrage de vulgarisation scientifique et philosophique.

Les lectures que Weyl propose de l'*Hv* dépendent-elles du statut de ces textes ?

1.4. Des lectures et des usages différents de l'*Hv*.

(A) UNE LECTURE HISTORIENNE

WEYL s'intéresse alors au développement de la *géométrie différentielle* et au lien qu'elle entretient avec *une physique des actions de contact*.

1.4. Des lectures et des usages différents de l'*Hv*.

(A) UNE LECTURE HISTORIENNE

WEYL s'intéresse alors au développement de la *géométrie différentielle* et au lien qu'elle entretient avec *une physique des actions de contact*.

- mise en perspective historique d'ordre *continuiste* avec le traité de GAUSS sur les surfaces courbes

1.4. Des lectures et des usages différents de l'*Hv*.

(A) UNE LECTURE HISTORIENNE

WEYL s'intéresse alors au développement de la *géométrie différentielle* et au lien qu'elle entretient avec *une physique des actions de contact*.

- mise en perspective historique d'ordre *continuiste* avec le traité de GAUSS sur les surfaces courbes
- étude de la *réception* de la leçon de RIEMANN jusqu'à l'avènement de la relativité générale

1.4. Des lectures et des usages différents de l'*Hv*.

(A) UNE LECTURE HISTORIENNE

WEYL s'intéresse alors au développement de la *géométrie différentielle* et au lien qu'elle entretient avec *une physique des actions de contact*.

- mise en perspective historique d'ordre *continuiste* avec le traité de GAUSS sur les surfaces courbes
- étude de la *réception* de la leçon de RIEMANN jusqu'à l'avènement de la relativité générale
- interprétation *rétrospective* de la troisième partie de l'*Habilitationsvortrag* sur la nature de l'espace physique

1.4. Des lectures et des usages différents de l'*Hv*.

(A) UNE LECTURE HISTORIENNE

WEYL s'intéresse alors au développement de la *géométrie différentielle* et au lien qu'elle entretient avec *une physique des actions de contact*.

- mise en perspective historique d'ordre *continuiste* avec le traité de GAUSS sur les surfaces courbes
- étude de la *réception* de la leçon de RIEMANN jusqu'à l'avènement de la relativité générale
- interprétation *rétrospective* de la troisième partie de l'*Habilitationsvortrag* sur la nature de l'espace physique
- analogie entre la géométrie de RIEMANN et la physique des actions de contact de FARADAY

(B) une lecture mathématicienne

Weyl entend formuler et résoudre des problèmes mathématiques inédits qu'il construit en se familiarisant avec l'*Hv*.

(b) une lecture mathématicienne

Weyl entend formuler et résoudre des problèmes mathématiques inédits qu'il construit en se familiarisant avec l'*Hv*.

- Mise de côté d'un résidu de géométrie à distance chez Riemann et construction d'une géométrie *purement infinitésimale*,
- justification du fait que la métrique d'une variété est définie par une forme quadratique non dégénérée (problème de l'espace)

(c) une lecture philosophique

Weyl s'appuie sur l'*Hv* pour

- critiquer la théorie kantienne de l'espace développée dans l'« Esthétique transcendantale »,
- repenser le rapport entre l'espace et la matière

(c) une lecture philosophique

Weyl s'appuie sur l'*Hv* pour

- critiquer la théorie kantienne de l'espace développée dans l'« Esthétique transcendantale »,
- repenser le rapport entre l'espace et la matière

Cette lecture philosophique doit être rapportée

(i) au développement de la *relativité générale*,

(ii) aux positions épistémologiques de Weyl,

(iii) aux philosophies qu'il s'approprie alors (Fichte, Husserl).

1.5. Ces « lectures » ne coïncident pas avec le statut des textes de Weyl

Dans « Reine Infinitesimalgeometrie »,

- WEYL confronte la géométrie de RIEMANN à la conception kantienne de l'espace (§ 1)
- il investit mathématiquement l'*Hv* : il introduit des variétés qui généralisent les variétés riemanniennes.

1.5. Ces « lectures » ne coïncident pas avec le statut des textes de Weyl

Dans « Reine Infinitesimalgeometrie »,

- WEYL confronte la géométrie de RIEMANN à la conception kantienne de l'espace (§ 1)
- il investit mathématiquement l'*Hv* : il introduit des variétés qui généralisent les variétés riemanniennes.

Certes, la leçon de RIEMANN se caractérise par une *intrication* entre

- des concepts mathématiques
- et une *conception philosophique* des espaces mathématique et physique

1.5. Ces « lectures » ne coïncident pas avec le statut des textes de Weyl

Dans « Reine Infinitesimalgeometrie »,

- WEYL confronte la géométrie de RIEMANN à la conception kantienne de l'espace (§ 1)
- il investit mathématiquement l'*Hv* : il introduit des variétés qui généralisent les variétés riemanniennes.

Certes, la leçon de RIEMANN se caractérise par une *intrication* entre

- des concepts mathématiques
- et une *conception philosophique* des espaces mathématique et physique

En réalité, WEYL ne sépare pas sa *pratique des mathématiques* et ses *positionnements philosophiques*.

1.6. Problèmes à résoudre

(a) Quelles lectures philosophiques, historiennes et mathématiciennes de l'*Hv* WEYL propose-t-il ?

(b) Quels rapports ces lectures entretiennent-elles ?

(c) Que nous disent-elles sur les relations entre la *pratique mathématique* et les *positions philosophiques* de WEYL ?

1. 7. Plan de la présentation

PREMIÈRE PARTIE : une lecture *historienne* de l'*Hv*

- continuiste et cumulative lorsque WEYL aborde le contenu mathématique de l'*Hv*,
- discontinuiste et rétrospective lorsque WEYL commente les hypothèses de RIEMANN sur l'espace physique

DEUXIÈME PARTIE : une lecture *mathématicienne* de l'*Hv*

- Une généralisation de la géométrie riemannienne (1918)
- La résolution du problème concernant la *nature* de la métrique de l'espace (1921-1923)

TROISIÈME PARTIE : lecture *philosophique* de l'*Hv*. Suggestion d'hypothèses concernant le lien entre

- les positions philosophiques de WEYL
- sa pratique des mathématiques.

Première partie : une lecture historienne de la leçon de Riemann.

Textes de référence

- *Raum, Zeit, Materie*, § 10 à 12,
- Les rééditions de l'*Hv* (1919, 1921, 1923)

I. 1. Les surfaces courbes de Gauss et la « géométrie de Riemann ».

Dans les § 10 à 12 de *RZM*, Weyl effectue une reconstruction historique *linéaire* et *continuiste* de la « géométrie infinitésimale :

- invention des géométries non euclidiennes (§ 10),
- traité des surfaces courbes de Gauss et géométrie riemannienne (§ 11),

Pour WEYL, l'*Hv* prolonge et généralise le traité de GAUSS sur les surfaces courbes.

« Les idées de RIEMANN *— qui pour la suite de nos développements sont d'une importance capitale — se rattachent aux principes fondamentaux de la géométrie infinitésimale, en particulier à ceux de la théorie des surfaces, tels qu'ils furent posés par* GAUSS *dans ses Disquisitiones circa superficies curvas ».(RZM, p. 72)*

Pour Weyl, l'*Hv* prolonge et généralise le traité de Gauss sur les surfaces courbes.

« Les idées de Riemann *— qui pour la suite de nos développements sont d'une importance capitale — se rattachent aux principes fondamentaux de la géométrie infinitésimale, en particulier à ceux de la théorie des surfaces, tels qu'ils furent posés par* Gauss *dans ses Disquisitiones circa superficies curvas ».(RZM, p. 72)*

Cette lecture historienne est centrée sur

(a) sur la recherche de filiations

(b) sur le développement interne d'une théorie mathématique (géométries différentielle et riemannienne). La « géométrie » n'est pas envisagée comme une *discipline* rapportée à des institutions.

Il s'agit donc d'une *mise en perspective* historique

- faite par un *mathématicien*,
- pour éclairer un lecteur physicien ou mathématicien.

L'ordre historique décrit dans le § 11 va de pair avec un *ordre d'exposition* adopté à des fins pédagogiques :

(a) la théorie des surfaces de GAUSS sert de point d'appui pour appréhender ensuite la géométrie riemannienne,

(b) la vision linéaire de l'histoire de la géométrie différentielle s'en trouve renforcée

Il s'agit donc d'une *mise en perspective* historique

- faite par un *mathématicien*,
- pour éclairer un lecteur physicien ou mathématicien.

L'ordre historique décrit dans le § 11 va de pair avec un *ordre d'exposition* adopté à des fins pédagogiques :

(a) la théorie des surfaces de GAUSS sert de point d'appui pour appréhender ensuite la géométrie riemannienne,

(b) la vision linéaire de l'histoire de la géométrie différentielle s'en trouve renforcée

Cette théorie se développerait « sans heurts » du PARTICULIER (dimension 2) au GÉNÉRAL (dimension n), avant d'être convenablement FORMALISÉE par CHRISTOFFEL, RICCI, LEVI-CIVITA, etc.

Les limites de cette approche sont de trois ordres :

- Le rapport entre les géométries NON EUCLIDIENNES (plus précisément la *géométrie hyperbolique*) et la THÉORIE DES SURFACES n'est pas évident,
- Les sources mathématiques mentionnées par RIEMANN dans l'*Hv* ne se réduisent pas à GAUSS,
- RIEMANN envisage des variétés de dimension n *abstraitement* : il y a un décrochage par rapport à GAUSS.

RIEMANN envisage des variétés

(a) de dimension finie quelconque

(b) qui ne sont pas plongées dans un espace euclidien.

I. 1. 1. Ce que Weyl retient du traité de Gauss.

WEYL définit d'abord la « géométrie infinitésimale » comme suit :

« La géométrie infinitésimale s'occupe de l'étude des courbes et des surfaces dans un espace euclidien à trois dimensions, dont nous désignerons les coordonnées par x, y, z *». (RZM, p. 73.)*

I. 1. 1. Ce que Weyl retient du traité de Gauss.

WEYL définit d'abord la « géométrie infinitésimale » comme suit :

« La géométrie infinitésimale s'occupe de l'étude des courbes et des surfaces dans un espace euclidien à trois dimensions, dont nous désignerons les coordonnées par x, y, z ». (RZM, p. 73.)

La géométrie infinitésimale n'est pas encore conçue comme une théorie des variétés de dimension n.

WEYL montre que GAUSS s'intéresse à la *géométrie intrinsèque* d'une surface courbe :

- Les surfaces courbes cessent d'être traitées comme des *objets* géométriques (i.e. des « limites » de solides),
- elles deviennent le *support* d'une géométrie,

(a) la première forme fondamentale.

Weyl insiste sur l'importance des *coordonnées curvilignes* pour décrire la géométrie intrinsèque d'une surface courbe :

« [les] points [d'une surface] se distinguent par les valeurs de deux paramètres u_1 et u_2 ; elle possède par suite une représentation paramétrique :

$$x = x(u_1 \ u_2), \quad y = y(u_1 \ u_2), \quad z = z(u_1 \ u_2),$$

de nouveau u_1 et u_2 peuvent être soumis à telle transformation que l'on voudra, sans que la représentation paramétrique cesse de donner la même surface. Nous supposerons que les fonctions [ci-dessus] sont non seulement continues, mais encore dérivables. (...) Les paramètres u_1 et u_2 sont les coordonnées curvilignes (ou de Gauss*) ». (RZM, p. 73.)*

(i) Soient S une surface courbe, f une représentation paramétrique de S et $P = (u_1, u_2)$ un point de S,

(i) Soient S une surface courbe, f une représentation paramétrique de S et $P = (u_1, u_2)$ un point de S,

(ii) $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2)$ désigne le vecteur tangent à la courbe coordonnée u_1 au point P, $\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2)$ le vecteur tangent à la courbe coordonnée u_2 au point P.

(i) Soient S une surface courbe, f une représentation paramétrique de S et $P=(u_1,u_2)$ un point de S,

(ii) $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1,u_2)$ désigne le vecteur tangent à la courbe coordonnée u_1 au point P, $\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1,u_2)$ le vecteur tangent à la courbe coordonnée u_2 au point P.

(iii) Posons :

$$\begin{array}{rcl} E(u,v) & = & \left\|\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1,u_2)\right\|^2 \\ F(u,v) & = & \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1,u_2)\cdot\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1,u_2) \\ G(u,v) & = & \left\|\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1,u_2)\right\|^2 \end{array}$$

(i) Soient S une surface courbe, f une représentation paramétrique de S et $P=(u_1,u_2)$ un point de S,

(ii) $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1,u_2)$ désigne le vecteur tangent à la courbe coordonnée u_1 au point P, $\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1,u_2)$ le vecteur tangent à la courbe coordonnée u_2 au point P.

(iii) Posons :

$$\begin{array}{rcl} E(u,v) & = & \left\| \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1,u_2) \right\|^2 \\ F(u,v) & = & \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1,u_2) \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1,u_2) \\ G(u,v) & = & \left\| \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1,u_2) \right\|^2 \end{array}$$

(iv) La *première forme fondamentale* vérifie :

$$ds^2 = Edu_1^2 + 2Fdu_1 u_2 + Gdu_2^2.$$

Des propriétés géométriques sont *intrinsèques* à une surface courbe si elles ne dépendent que des coefficients E, F et G du ds^2 et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre :

Des propriétés géométriques sont *intrinsèques* à une surface courbe si elles ne dépendent que des coefficients E, F et G du ds^2 et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre :

« GAUSS *fit voir que cette forme quadratique différentielle,* ds^2*, détermine la géométrie sur la surface. Les longueurs de courbes, les angles, les grandeurs de domaines donnés sur la surface dépendent seulement d'elle ».* (*RZM*, p. 75.)

Des propriétés géométriques sont *intrinsèques* à une surface courbe si elles ne dépendent que des coefficients E, F et G du ds^2 et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre :

« GAUSS *fit voir que cette forme quadratique différentielle,* ds^2*, détermine la géométrie sur la surface. Les longueurs de courbes, les angles, les grandeurs de domaines donnés sur la surface dépendent seulement d'elle ».* (*RZM*, p. 75.)

(b) La MESURE DE COURBURE en un point d'une surface et le THEOREMA EGREGIUM.

WEYL ne répertorie pas les trois définitions gaussiennes de la *mesure de courbure* en un point d'une surface. Il ne formule pas non plus la seconde forme fondamentale.

Il explicite intuitivement cette mesure de courbure (cf. § 6 du traité de GAUSS).

Soient S une surface courbe et P un point de S, Notons A_S l'aire d'une partie de la surface S au voisinage de P.

Soient S une surface courbe et P un point de S, Notons A_S l'aire d'une partie de la surface S au voisinage de P.

(i) Considérons les vecteurs unitaires orthogonaux à la surface en chacun des points situés dans le voisinage de P.

Soient S une surface courbe et P un point de S, Notons A_S l'aire d'une partie de la surface S au voisinage de P.

(i) Considérons les vecteurs unitaires orthogonaux à la surface en chacun des points situés dans le voisinage de P.

(ii) Donnons-nous ensuite une sphère Σ de rayon 1 et déplaçons chacun de ces vecteurs par parallélisme, jusqu'à ce que leur origine coïncide avec le centre de Σ.

Soient S une surface courbe et P un point de S, Notons A_S l'aire d'une partie de la surface S au voisinage de P.

(i) Considérons les vecteurs unitaires orthogonaux à la surface en chacun des points situés dans le voisinage de P.

(ii) Donnons-nous ensuite une sphère Σ de rayon 1 et déplaçons chacun de ces vecteurs par parallélisme, jusqu'à ce que leur origine coïncide avec le centre de Σ.

(iii) Ces vecteurs décrivent une région à la surface de Σ dont l'aire est notée A_Σ.

Soient S une surface courbe et P un point de S, Notons A_S l'aire d'une partie de la surface S au voisinage de P.

(i) Considérons les vecteurs unitaires orthogonaux à la surface en chacun des points situés dans le voisinage de P.

(ii) Donnons-nous ensuite une sphère Σ de rayon 1 et déplaçons chacun de ces vecteurs par parallélisme, jusqu'à ce que leur origine coïncide avec le centre de Σ.

(iii) Ces vecteurs décrivent une région à la surface de Σ dont l'aire est notée A_Σ.

(iv) La mesure de courbure de la surface S au point P est *la limite d'un quotient A_Σ/A_S lorsque A_S se « rétrécit » autour de P*.

Soient S une surface courbe et P un point de S, Notons A_S l'aire d'une partie de la surface S au voisinage de P.

(i) Considérons les vecteurs unitaires orthogonaux à la surface en chacun des points situés dans le voisinage de P.

(ii) Donnons-nous ensuite une sphère Σ de rayon 1 et déplaçons chacun de ces vecteurs par parallélisme, jusqu'à ce que leur origine coïncide avec le centre de Σ.

(iii) Ces vecteurs décrivent une région à la surface de Σ dont l'aire est notée A_Σ.

(iv) La mesure de courbure de la surface S au point P est *la limite d'un quotient A_Σ / A_S lorsque A_S se « rétrécit » autour de* P.

Cette mesure de courbure est une *propriété intrinsèque* : elle ne dépend que des coefficients E, F, G du ds^2 et de leurs dérivées jusqu'au second ordre (THEOREMA EGREGIUM).

WEYL ne revient pas sur les calculs qui président à ce résultat.

- Il met en exergue l'un des aspects du traité de GAUSS : appréhender *intuitivement* le concept de *mesure de courbure* et le *theorema egregium* avant de les formuler *analytiquement*.

WEYL ne revient pas sur les calculs qui président à ce résultat.

- Il met en exergue l'un des aspects du traité de GAUSS : appréhender *intuitivement* le concept de *mesure de courbure* et le *theorema egregium* avant de les formuler *analytiquement*.

Le concept de *mesure de courbure* permet une CLASSIFICATION des surfaces courbes.

- Elles sont équivalentes si et seulement si elles ont même mesure de courbure en chacun de leurs points,
- Intuitivement, il faut et il suffit de leur faire subir une FLEXION — sans EXTENSION — pour qu'elles coïncident.

« la courbure reste invariable, si l'on déforme la surface sans l'étendre ni la déchirer. C'était donc démontrer que la courbure est un invariant différentiel de la forme différentielle quadratique binaire attachée à la surface ». (*RZM*, p. 76.)

I. 1. 2. Lien avec l'*Habilitationsvortrag*.

Au début de l'*Hv*, RIEMANN mentionne les noms de GAUSS, PFAFF, ABEL, JACOBI. Il évoque l'étude des « fonctions analytiques à plusieurs variables » et la théorie générale des équations différentielles.

(a) WEYL surdétermine donc la place du traité de GAUSS sur les surfaces courbes dans l'élaboration de l'*Hv*.

(b) De plus, il estime que cette généralisation se fait sans « heurts ».

« RIEMANN réussit à étendre la notion de courbure à des formes différentielles quadratiques de plusieurs variables : il montra que l'on n'a plus affaire à un scalaire, mais à un tenseur ». (*RZM*, p. 82.)

L'argument de WEYL est simplificateur :

(i) RIEMANN conçoit des variétés de dimension finie non plongées dans un espace euclidien.

(ii) D'où une généralisation par *dénivellation* et *abstraction*.

(iii) D'où une difficulté à définir des fonctions « continues » et « différentiables » sur ces variétés.

(iv) Dans l'*Hv*, RIEMANN n'exprime pas la notion de courbure sous la forme d'un tenseur.

L'argument de WEYL est simplificateur :

(i) RIEMANN conçoit des variétés de dimension finie non plongées dans un espace euclidien.

(ii) D'où une généralisation par *dénivellation* et *abstraction*.

(iii) D'où une difficulté à définir des fonctions « continues » et « différentiables » sur ces variétés.

(iv) Dans l'*Hv*, RIEMANN n'exprime pas la notion de courbure sous la forme d'un tenseur.

WEYL corrige cette erreur dans ses éditions commentées de l'*Hv*. La formulation analytique de la mesure de courbure apparaît dans un article (non publié) de RIEMANN intitulé *Commentatio mathematica* (1861). Le lien entre cet article et l'*Hv* n'est pas évident.

- La démarche suivie par Gauss demeure en partie *calculatoire* dans son traité.
- En revanche, l'approche de Riemann est *conceptuelle* et *abstraite* dans son *Hv*.

(a) Certes, la leçon de Riemann s'adresse également à des philosophes, d'où le privilège accordé à la *conception* sur la *construction* dans l'*Hv*.

(b) Mais la promotion d'une mathématique *conceptuelle* est attestée à Göttingen dans les années 1850.

- Dans son *Hv*, Riemann cite Jacobi qui, selon Dirichlet, aurait privilégié la pensée au détriment du calcul en analyse.
- L'argument de Dirichlet (« Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi », 1852, in P. Lejeune Dirichlet, *Werke*, Band 2, Berlin, 1897, p. 245) est plus nuancé.

- Dans son *Hv*, RIEMANN cite JACOBI qui, selon DIRICHLET, aurait privilégié la pensée au détriment du calcul en analyse.
- L'argument de DIRICHLET (« Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob JACOBI », 1852, in P. Lejeune DIRICHLET, *Werke*, Band 2, Berlin, 1897, p. 245) est plus nuancé.

« Même si la tendance la plus prégnante de la nouvelle analyse consiste à substituer la pensée au calcul, il existe cependant certains domaines dans lesquels le calcul conserve toute sa place. JACOBI *qui a soutenu de manière essentielle cette tendance a également apporté d'importantes contributions dans ces domaines, en raison de sa maîtrise des techniques [de calcul] ».*

- Dans son *Hv*, Riemann cite Jacobi qui, selon Dirichlet, aurait privilégié la pensée au détriment du calcul en analyse.
- L'argument de Dirichlet (« Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi », 1852, in P. Lejeune Dirichlet, *Werke*, Band 2, Berlin, 1897, p. 245) est plus nuancé.

« Même si la tendance la plus prégnante de la nouvelle analyse consiste à substituer la pensée au calcul, il existe cependant certains domaines dans lesquels le calcul conserve toute sa place. Jacobi *qui a soutenu de manière essentielle cette tendance a également apporté d'importantes contributions dans ces domaines, en raison de sa maîtrise des techniques [de calcul] ».*

Weyl ne soutient pas que Riemann serait le promotteur de la « méthode axiomatique » avant l'heure, contrairement à Russell (1897), Husserl (1929) ou encore Vuillemin (1962)

I. 2. L'espace physique dans l'*Hv* et la « relativité générale ».

Weyl insiste sur les effets de *rupture* que la troisième partie de l'*Hv* entraîne / aux conceptions « habituelles » de l'espace.

Deux hypothèses de Riemann :

I. 2. L'espace physique dans l'*Hv* et la « relativité générale ».

Weyl insiste sur les effets de *rupture* que la troisième partie de l'*Hv* entraîne / aux conceptions « habituelles » de l'espace.

Deux hypothèses de Riemann :

(a) dans l'immensurablement grand, l'espace peut avoir une mesure de courbure positive, il est alors

I. 2. L'espace physique dans l'*Hv* et la « relativité générale ».

Weyl insiste sur les effets de *rupture* que la troisième partie de l'*Hv* entraîne / aux conceptions « habituelles » de l'espace.

Deux hypothèses de Riemann :

(a) dans l'immensurablement grand, l'espace peut avoir une mesure de courbure positive, il est alors
   - *illimité* (au sens où il n'a pas de bords),

I. 2. L'espace physique dans l'*Hv* et la « relativité générale ».

WEYL insiste sur les effets de *rupture* que la troisième partie de l'*Hv* entraîne / aux conceptions « habituelles » de l'espace.

Deux hypothèses de RIEMANN :

(a) dans l'immensurablement grand, l'espace peut avoir une mesure de courbure positive, il est alors
   - *illimité* (au sens où il n'a pas de bords),
   - et *fini* (la distance entre deux points quelconques ne peut pas être arbitrairement grande)

I. 2. L'espace physique dans l'*Hv* et la « relativité générale ».

WEYL insiste sur les effets de *rupture* que la troisième partie de l'*Hv* entraîne / aux conceptions « habituelles » de l'espace.

Deux hypothèses de RIEMANN :

(a) dans l'immensurablement grand, l'espace peut avoir une mesure de courbure positive, il est alors
  - *illimité* (au sens où il n'a pas de bords),
  - et *fini* (la distance entre deux points quelconques ne peut pas être arbitrairement grande)

(b) dans l'immensurablement petit, l'espace peut avoir une mesure de courbure variable,

I. 2. L'espace physique dans l'*Hv* et la « relativité générale ».

WEYL insiste sur les effets de *rupture* que la troisième partie de l'*Hv* entraîne / aux conceptions « habituelles » de l'espace.

Deux hypothèses de RIEMANN :

(a) dans l'immensurablement grand, l'espace peut avoir une mesure de courbure positive, il est alors
  - *illimité* (au sens où il n'a pas de bords),
  - et *fini* (la distance entre deux points quelconques ne peut pas être arbitrairement grande)

(b) dans l'immensurablement petit, l'espace peut avoir une mesure de courbure variable,
  - il n'est alors pas *homogène*

I. 2. L'espace physique dans l'*Hv* et la « relativité générale ».

WEYL insiste sur les effets de *rupture* que la troisième partie de l'*Hv* entraîne / aux conceptions « habituelles » de l'espace.

Deux hypothèses de RIEMANN :

(a) dans l'immensurablement grand, l'espace peut avoir une mesure de courbure positive, il est alors
  - *illimité* (au sens où il n'a pas de bords),
  - et *fini* (la distance entre deux points quelconques ne peut pas être arbitrairement grande)

(b) dans l'immensurablement petit, l'espace peut avoir une mesure de courbure variable,
  - il n'est alors pas *homogène*
  - ses déterminations métriques dépendent de « forces agissantes » de nature indéterminée.

Selon WEYL, la seconde hypothèse implique que la structure métrique de l'ESPACE dépend de la MATIÈRE :

*« [*RIEMANN*] affirme plutôt contrairement à la croyance traditionnelle, que l'espace en soi n'est pas autre chose qu'une multiplicité tridimensionnelle amorphe et que c'est le contenu matériel qui le remplit qui lui donne sa forme et détermine ses rapports de mesure ».* (*RZM*, p. 84.)

Selon WEYL, la seconde hypothèse implique que la structure métrique de l'ESPACE dépend de la MATIÈRE :

*« [*RIEMANN*] affirme plutôt contrairement à la croyance traditionnelle, que l'espace en soi n'est pas autre chose qu'une multiplicité tridimensionnelle amorphe et que c'est le contenu matériel qui le remplit qui lui donne sa forme et détermine ses rapports de mesure ».* (*RZM*, p. 84.)

WEYL s'appuie sur ce passage de l'*Hv* :

« La réponse à ces questions ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des phénomènes, vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que Newton a prise pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer ».

La lecture historienne de l'*Hv* par WEYL est le lieu d'une tension entre

(a) une vision *continuiste* des développements de la *géométrie différentielle* et

(b) une vision *discontinuiste* dans l'ordre des *conceptions de l'espace physique*.

WEYL effectue une lecture rétrospective de la fin de l'*Hv* : il l'interprète en fonction du développement de la relativité générale, (i.e. une théorie de la *gravitation* dont les fondements ne sont pas ceux du *newtonisme*).

Cette lecture n'est pas naïve. (Différent de SALANSKIS : « l'objet dans lequel travaille EINSTEIN se laisse *a posteriori* reconnaître comme celui qu'anticipait à sa manière RIEMANN »).

Cette lecture n'est pas naïve. (Différent de SALANSKIS : « l'objet dans lequel travaille EINSTEIN se laisse *a posteriori* reconnaître comme celui qu'anticipait à sa manière RIEMANN »).

(a) WEYL n'affirme pas que RIEMANN aurait *anticipé* sur la relativité générale

« une théorie valide ne pouvait confirmer ces idées qu'après que le temps fut rattaché comme quatrième coordonnée aux trois coordonnées spatiales, comme le montre la théorie de la relativité restreinte ». (*RZM*, p. 87.)

Cette lecture n'est pas naïve. (Différent de SALANSKIS : « l'objet dans lequel travaille EINSTEIN se laisse *a posteriori* reconnaître comme celui qu'anticipait à sa manière RIEMANN »).

(a) WEYL n'affirme pas que RIEMANN aurait *anticipé* sur la relativité générale

« une théorie valide ne pouvait confirmer ces idées qu'après que le temps fut rattaché comme quatrième coordonnée aux trois coordonnées spatiales, comme le montre la théorie de la relativité restreinte ». (*RZM*, p. 87.)

(b) Il ne suppose pas qu'EINSTEIN aurait subitement découvert la relativité générale en parcourant l'*Hv*.

« EINSTEIN a fait obtenir la victoire aux idées de RIEMANN (sans d'ailleurs avoir été guidé par RIEMANN) ». (*RZM*, p. 87.)

WEYL estime cependant que la relativité générale donne leur sens et leur portée aux hypothèses de RIEMANN.

On peut expliquer l'interprétation rétrospective de WEYL en deux points :

(a) Selon RIEMANN, ces hypothèses demeurent *ouvertes*. Contrairement à la croyance commune, elles sont physiquement *concevables* et elles sont en attente de confirmation. La fin de l'*Hv* a une vertu programmatique qui incite à cette lecture rétrospective.

(b) WEYL ne sépare pas cette mise en perspective historique de sa pratique de mathématicien et donc de son intérêt pour la mathématisation de la relativité générale.

Cette lecture RÉTROSPECTIVE est conditionnée par la recherche de FILIATIONS.

WEYL tente d'identifier le « véritable continuateur » de RIEMANN en géométrie.

- Il adopte un ton emphatique
- il s'appuie sur des *prénotions* (par ex. celle de « génie ») :

Cette lecture RÉTROSPECTIVE est conditionnée par la recherche de FILIATIONS.

WEYL tente d'identifier le « véritable continuateur » de RIEMANN en géométrie.

- Il adopte un ton emphatique
- il s'appuie sur des *prénotions* (par ex. celle de « génie ») :

« Mais le vrai continuateur de RIEMANN, *celui dont le génie mathématique et physique est du même ordre que le génie de l'illustre géomètre, celui qui accomplit, soixante-dix ans après, les prophéties que* RIEMANN *avait énoncées avec les précisions que nous venons de rappeler, c'est* EINSTEIN *».* (*RZM*, p. 88.)

WEYL est attaché à une « histoire » annexée à la figure des « grands hommes ». Son assertion relève presque de la pensée magique.

I.3. l'*Hv* et la physique des actions de contact de Faraday.

Weyl construit une *analogie* entre la *géométrie* de Riemann et la *physique des actions de contact* de Faraday et Maxwell.

I.3. l'*Hv* et la physique des actions de contact de Faraday.

Weyl construit une *analogie* entre la *géométrie* de Riemann et la *physique des actions de contact* de Faraday et Maxwell.

« Le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie de Riemann *repose sur les mêmes principes que la physique des actions de contact. Par l'observation, nous apprenons par exemple, que dans un fil conducteur, l'intensité du courant est proportionnelle à la différence de potentiel à l'origine et à l'extrémité du fil (loi d'Ohm). Mais nous savons que les résultats des mesures faites sur un long fil conducteur quelconque ne vérifient pas exactement cette loi ; pourtant ces mesures nous montrent que la loi d'Ohm est vraie pour un fil infiniment petit ».* (*RZM*, p. 78.)

Une PHYSIQUE DES ACTIONS DE CONTACT repose

- sur la négation des *actions à distance*
- sur la formulation de lois valables dans l'*infiniment petit*.

Une PHYSIQUE DES ACTIONS DE CONTACT repose

- sur la négation des *actions à distance*
- sur la formulation de lois valables dans l'*infiniment petit*.

La géométrie riemannienne est donc à une physique des actions de contact, ce que la géométrie euclidienne est à une physique des actions à distance.

En effet, une variété riemannienne M ne vérifie les propriétés de la géométrie euclidienne que dans l'infiniment petit, c'est-à-dire sur l'espace tangent en un point P de M.

WEYL suppose que les développements théoriques d'une géométrie infinitésimale et d'une physique des actions de contact vont de pair. Il parle à ce propos d'une *correspondance*.

F. BALIBAR relativise l'hypothèse de WEYL :

WEYL suppose que les développements théoriques d'une géométrie infinitésimale et d'une physique des actions de contact vont de pair. Il parle à ce propos d'une *correspondance*.

F. BALIBAR relativise l'hypothèse de WEYL :

(a) RIEMANN et FARADAY n'entendent pas la même chose par « espace » : les investigations de FARADAY portent sur l'espace comme « milieu » et non sur l'espace géométrique muni d'une certaine structure métrique,

WEYL suppose que les développements théoriques d'une géométrie infinitésimale et d'une physique des actions de contact vont de pair. Il parle à ce propos d'une *correspondance*.

F. BALIBAR relativise l'hypothèse de WEYL :

(a) RIEMANN et FARADAY n'entendent pas la même chose par « espace » : les investigations de FARADAY portent sur l'espace comme « milieu » et non sur l'espace géométrique muni d'une certaine structure métrique,

(b) Si FARADAY nie l'existence d'interactions à distance, il ne suppose à aucun moment que la *métrique* de l'espace serait conditionnée par des forces agissantes en son sein,

WEYL suppose que les développements théoriques d'une géométrie infinitésimale et d'une physique des actions de contact vont de pair. Il parle à ce propos d'une *correspondance*.

F. BALIBAR relativise l'hypothèse de WEYL :

(a) RIEMANN et FARADAY n'entendent pas la même chose par « espace » : les investigations de FARADAY portent sur l'espace comme « milieu » et non sur l'espace géométrique muni d'une certaine structure métrique,

(b) Si FARADAY nie l'existence d'interactions à distance, il ne suppose à aucun moment que la *métrique* de l'espace serait conditionnée par des forces agissantes en son sein,

(c) Il n'y aurait pas de lien historiquement attesté entre FARADAY et MAXWELL d'une part, RIEMANN d'autre part.

« Les conceptions de RIEMANN *représentent une sorte de bifurcation, une voie de traverse que le cours de la physique n'a tout d'abord pas emprunté ».*

Le parallèle de WEYL entre la géométrie riemannienne et la physique des actions de contact de FARADAY n'est pas attesté historiquement.

Il ne fait pas cette analogie gratuitement. Elle est liée à ses recherches visant à unifier l'électromagnétisme classique et la relativité générale.

(a) La géométrie *purement infinitésimale* de WEYL (1918) est une généralisation de la géométrie riemannienne.

(b) Elle sert de cadre formel pour construire une théorie unifiée des *champs* gravitationnel et électromagnétique. Cette théorie relève d'une *physique des actions de contact*.

Deuxième partie : une lecture mathématicienne de l'*Habilitationsvortrag*.

Textes de référence

- « Reine Infinitesimalgeometrie » (1918).
- « Gravitation und Elektrizität » (1918).
- Les rééditions de l'*Hv* (1919, 1921, 1923).
- « Das Raumproblem » (1922).

Deuxième partie : une lecture mathématicienne de l'*Habilitationsvortrag*.

Textes de référence

- « Reine Infinitesimalgeometrie » (1918).
- « Gravitation und Elektrizität » (1918).
- Les rééditions de l'*Hv* (1919, 1921, 1923).
- « Das Raumproblem » (1922).

Réf. C. Goldstein : une lecture mathématicienne a « pour but de trouver des problèmes à résoudre, des méthodes à utiliser, bref une source d'inspiration pour produire de nouvelles mathématiques ».

Deuxième partie : une lecture mathématicienne de l'*Habilitationsvortrag.*

Textes de référence

- « Reine Infinitesimalgeometrie » (1918).
- « Gravitation und Elektrizität » (1918).
- Les rééditions de l'*Hv* (1919, 1921, 1923).
- « Das Raumproblem » (1922).

Réf. C. Goldstein : une lecture mathématicienne a « pour but de trouver des problèmes à résoudre, des méthodes à utiliser, bref une source d'inspiration pour produire de nouvelles mathématiques ».

WEYL formule deux *problèmes* au contact de l'*Hv* :

(a) La géométrie riemannienne est-elle une géométrie *purement* infinitésimale ?

(b) Comment justifier le privilège accordé aux espaces *pythagoriciens dans l'infinitésimal* ?

II. 1. La géométrie purement infinitésimale de Weyl.

- Une VARIÉTÉ RIEMANNIENNE M est une variété lisse munie d'une métrique définie par :

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

II. 1. La géométrie purement infinitésimale de Weyl.

- Une VARIÉTÉ RIEMANNIENNE M est une variété lisse munie d'une métrique définie par :

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

- Soient p un point de M et $v_p \in T_pM$ un vecteur tangent. La longueur de v_p n'est pas modifiée par déplacement parallèle — intuitivement, sans glissement ni retournement — le long d'un lacet issu de p. En revanche, son *orientation* l'est.

II. 1. La géométrie purement infinitésimale de Weyl.

- Une VARIÉTÉ RIEMANNIENNE M est une variété lisse munie d'une métrique définie par :

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

- Soient p un point de M et $v_p \in T_pM$ un vecteur tangent. La longueur de v_p n'est pas modifiée par déplacement parallèle — intuitivement, sans glissement ni retournement — le long d'un lacet issu de p. En revanche, son *orientation* l'est.

Il est ainsi possible de comparer les longueurs de deux vecteurs localisés en des points distincts : RIEMANN suppose en effet que « la longueur des lignes est indépendante du lieu » et il ajoute que « chaque ligne est mesurable au moyen d'une autre ».

Pour WEYL, il s'agit d'un dernier élément de « géométrie à distance » qu'il faut rejeter si l'on veut construire une « géométrie purement infinitésimale », ou *géométrie des actions de contact*.

Pour WEYL, il s'agit d'un dernier élément de « géométrie à distance » qu'il faut rejeter si l'on veut construire une « géométrie purement infinitésimale », ou *géométrie des actions de contact*.

WEYL considère tout d'abord une *structure conforme* sur une variété M, c'est-à-dire une classe d'équivalence $[g]$ de métriques riemanniennes (ou lorentziennes) :

Pour WEYL, il s'agit d'un dernier élément de « géométrie à distance » qu'il faut rejeter si l'on veut construire une « géométrie purement infinitésimale », ou *géométrie des actions de contact*.

WEYL considère tout d'abord une *structure conforme* sur une variété M, c'est-à-dire une classe d'équivalence $[g]$ de métriques riemanniennes (ou lorentziennes) :

Deux métriques (g_{ij}) et (g'_{ij}) sont équivalentes s'il existe une fonction à valeurs strictement positives $\lambda(x)$, également appelée *fonction de jauge*, telle que

$$g'_{ij} = \lambda(x) g_{ij}, \qquad \lambda(x) > 0.$$

Pour WEYL, il s'agit d'un dernier élément de « géométrie à distance » qu'il faut rejeter si l'on veut construire une « géométrie purement infinitésimale », ou *géométrie des actions de contact*.

WEYL considère tout d'abord une *structure conforme* sur une variété M, c'est-à-dire une classe d'équivalence $[g]$ de métriques riemanniennes (ou lorentziennes) :

Deux métriques (g_{ij}) et (g'_{ij}) sont équivalentes s'il existe une fonction à valeurs strictement positives $\lambda(x)$, également appelée *fonction de jauge*, telle que

$$g'_{ij} = \lambda(x) g_{ij}, \qquad \lambda(x) > 0.$$

WEYL munit en outre M d'une *connexion métrique*, permettant de définir le transport parallèle et assurant ainsi la « cohésion » de cette variété.

WEYL interprète cette connexion comme la donnée d'une classe d'équivalence $[\varphi]$ de formes différentielles.

WEYL interprète cette connexion comme la donnée d'une classe d'équivalence $[\varphi]$ de formes différentielles.

Ainsi, « une métrique sur une variété repose sur une forme différentielle quadratique et une forme différentielle linéaire

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_i dx^i$$

modulo la relation d'équivalence :

$$ds'^2 = \lambda \cdot ds^2, \quad \varphi' = \varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Une variété munie d'une telle structure métrique sera dite *weylienne* [WEYLSCHE MANNIGFALTIGKEIT].

WEYL interprète cette connexion comme la donnée d'une classe d'équivalence $[\varphi]$ de formes différentielles.

Ainsi, « une métrique sur une variété repose sur une forme différentielle quadratique et une forme différentielle linéaire

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_i dx^i$$

modulo la relation d'équivalence :

$$ds'^2 = \lambda \cdot ds^2, \quad \varphi' = \varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Une variété munie d'une telle structure métrique sera dite *weylienne* [WEYLSCHE MANNIGFALTIGKEIT].

Cette structure permet de définir un tenseur $F = d\varphi$ (metrischer Wirbel) qui s'annule si et seulement si M est une variété riemannienne.

WEYL développe une THÉORIE UNIFIÉE DES CHAMPS :

Il tente d'unifier *par le haut* les théories de la gravitation et électromagnétique, en se fondant sur ce cadre géométrique.

WEYL développe une THÉORIE UNIFIÉE DES CHAMPS :

Il tente d'unifier *par le haut* les théories de la gravitation et électromagnétique, en se fondant sur ce cadre géométrique.

(a) La métrique attachée à cette géométrie doit avoir un sens physique à ses yeux.

WEYL développe une THÉORIE UNIFIÉE DES CHAMPS :

Il tente d'unifier *par le haut* les théories de la gravitation et électromagnétique, en se fondant sur ce cadre géométrique.

(a) La métrique attachée à cette géométrie doit avoir un sens physique à ses yeux.

*« Dans le langage de la physique, on peut considérer une variété métrique comme un monde rempli d'éther. La métrique déterminée qui gouverne la variété en question renvoie à un état déterminé de l'éther contenu dans l'univers ».(*WEYL, *p. 398)*

WEYL développe une THÉORIE UNIFIÉE DES CHAMPS :

Il tente d'unifier *par le haut* les théories de la gravitation et électromagnétique, en se fondant sur ce cadre géométrique.

(a) La métrique attachée à cette géométrie doit avoir un sens physique à ses yeux.

*« Dans le langage de la physique, on peut considérer une variété métrique comme un monde rempli d'éther. La métrique déterminée qui gouverne la variété en question renvoie à un état déterminé de l'éther contenu dans l'univers ».(*WEYL*, p. 398)*

(b) WEYL identifie le tenseur F au tenseur de champ électromagnétique, également appelé tenseur de FARADAY.

Il explique *formellement* pourquoi EINSTEIN rend exclusivement raison des interactions gravitationnelles.

A la fin de « reine Infinitesimalgeometrie », WEYL déduit les *lois de conservation* de l'énergie-impulsion et de la charge électrique.

A la fin de « reine Infinitesimalgeometrie », WEYL déduit les *lois de conservation* de l'énergie-impulsion et de la charge électrique.

(i) Il introduit l'action ou « fonction d'action » et l'intégrale d'action adaptées à sa théorie.

A la fin de « reine Infinitesimalgeometrie », WEYL déduit les *lois de conservation* de l'énergie-impulsion et de la charge électrique.

(i) Il introduit l'action ou « fonction d'action » et l'intégrale d'action adaptées à sa théorie.

Il impose à cette intégrale d'action d'être invariante :

- par changement d'échelle
- par changement arbitraire de coordonnées d'espace-temps.

A la fin de « reine Infinitesimalgeometrie », WEYL déduit les *lois de conservation* de l'énergie-impulsion et de la charge électrique.

(i) Il introduit l'action ou « fonction d'action » et l'intégrale d'action adaptées à sa théorie.

Il impose à cette intégrale d'action d'être invariante :

- par changement d'échelle
- par changement arbitraire de coordonnées d'espace-temps.

(ii) Il se fonde ensuite sur un principe de Hamilton : l'état réel de l'univers correspond au fait qu'une telle intégrale soit extrémale. Il en déduit enfin les *équations de* MAXWELL et les *équations de la gravitation*.

WEYL regarde sa théorie comme un *aboutissement* au regard des développements *conjugués*

- de la géométrie infinitésimale, dont il radicalise le sens,
- et de la physique des actions de contact, qu'il parachève avec sa théorie unitaire.

Ses lectures mathématicienne et historienne se rejoignent.

WEYL regarde sa théorie comme un *aboutissement* au regard des développements *conjugués*

- de la géométrie infinitésimale, dont il radicalise le sens,
- et de la physique des actions de contact, qu'il parachève avec sa théorie unitaire.

Ses lectures mathématicienne et historienne se rejoignent.

(a) EINSTEIN montrera dès 1918 que la théorie de WEYL n'est pas empiriquement attestée,

(b) En 1920, PAULI affirmera qu'une théorie classique des champs échoue à rendre raison du réel à l'échelle subatomique.

II. 2. Le « problème de l'espace ».

Dans son *Hv*, Riemann se restreint à des variétés métriques qui sont pythagoriciennes dans l'infinitésimal *au sens strict*.

De manière équivalente, une variété riemannienne M :

- est telle que le théorème de Pythagore n'est vérifié que pour des points infiniment voisins P et P' de M, (il est valable sur l'espace tangent à M au point P).
- se caractérise par la donnée d'une *structure euclidienne* en chacun de ses espaces tangents.

II. 2. Le « problème de l'espace ».

Dans son *Hv*, Riemann se restreint à des variétés métriques qui sont pythagoriciennes dans l'infinitésimal *au sens strict*.

De manière équivalente, une variété riemannienne M :

- est telle que le théorème de Pythagore n'est vérifié que pour des points infiniment voisins P et P' de M, (il est valable sur l'espace tangent à M au point P).
- se caractérise par la donnée d'une *structure euclidienne* en chacun de ses espaces tangents.

Autrement dit, une variété riemannienne est munie d'une structure métrique déterminée par une forme quadratique non dégénérée *et* définie positive.

Dans l'édition annotée de l'*Hv* (1919), WEYL montre que RIEMANN envisage d'autres types de métriques qu'il écarte au profit des seules variétés « riemanniennes ».

- *Qu'est-ce qui justifie ce choix ?*

Dans l'édition annotée de l'*Hv* (1919), WEYL montre que RIEMANN envisage d'autres types de métriques qu'il écarte au profit des seules variétés « riemanniennes ».

- *Qu'est-ce qui justifie ce choix ?*

En *relativité générale*, on a affaire à des variétés pseudo-riemanniennes, dont la structure métrique est déterminée par une forme quadratique de signature $(+,+,+,-)$, qui est *non dégénérée* mais *indéfinie*.

WEYL reformule le problème comme suit :

- comprendre le *caractère remarquable* de certaines classes de métriques « pythagoriciennes » *au sens large* : elles sont définies par une forme quadratique *non dégénérée*.

Si on admet la terminologie de Weyl, des variétés *riemannienne* et *pseudo-riemannienne* sont pythagoriciennes dans l'infinitésimal.

Si on admet la terminologie de WEYL, des variétés *riemannienne* et *pseudo-riemannienne* sont pythagoriciennes dans l'infinitésimal.

- WEYL observe que les variétés lisses munie d'une structure métrique pythagoricienne sont les seules variétés métriques dont la connexion affine est déterminée de *manière univoque*.
- Intuitivement, une CONNEXION AFFINE sur une variété lisse M nous dit comment on peut déplacer un vecteur le long d'une courbe tracée sur M de sorte qu'il demeure parallèle à lui-même. (*transport parallèle*).

Il ne faudrait pas croire que le « problème de l'espace » se trouve dans l'*Hv*. Il résulte d'une *appropriation* de ce texte par WEYL.

Il appartient donc à WEYL de le *construire* :

Il ne faudrait pas croire que le « problème de l'espace » se trouve dans l'*Hv*. Il résulte d'une *appropriation* de ce texte par WEYL.

Il appartient donc à WEYL de le *construire* :

(i) Il essaie d'abord de comprendre pourquoi les variétés « riemanniennes » sont privilégiées dans l'*Hv*,

Il ne faudrait pas croire que le « problème de l'espace » se trouve dans l'*Hv*. Il résulte d'une *appropriation* de ce texte par Weyl.

Il appartient donc à Weyl de le *construire* :

(i) Il essaie d'abord de comprendre pourquoi les variétés « riemanniennes » sont privilégiées dans l'*Hv*,

(ii) Il définit ensuite ce qu'il entend par variété *pythagoricienne* dans l'infinitésimal,

Il ne faudrait pas croire que le « problème de l'espace » se trouve dans l'*Hv*. Il résulte d'une *appropriation* de ce texte par WEYL.

Il appartient donc à WEYL de le *construire* :

(i) Il essaie d'abord de comprendre pourquoi les variétés « riemanniennes » sont privilégiées dans l'*Hv*,

(ii) Il définit ensuite ce qu'il entend par variété *pythagoricienne* dans l'infinitésimal,

(iii) Il identifie ce qui les caractérise (connexion affine déterminée univoquement)

Il ne faudrait pas croire que le « problème de l'espace » se trouve dans l'*Hv*. Il résulte d'une *appropriation* de ce texte par WEYL.

Il appartient donc à WEYL de le *construire* :

(i) Il essaie d'abord de comprendre pourquoi les variétés « riemanniennes » sont privilégiées dans l'*Hv*,

(ii) Il définit ensuite ce qu'il entend par variété *pythagoricienne* dans l'infinitésimal,

(iii) Il identifie ce qui les caractérise (connexion affine déterminée univoquement)

(iv) Il prouve enfin cette assertion en s'appuyant sur la *théorie des groupes et des algèbres de Lie linéaires*.

WEYL montre que le problème de l'espace qu'il résout prolonge et généralise le problème de Helmholtz-Lie dans le contexte de la relativité générale.

WEYL montre que le problème de l'espace qu'il résout prolonge et généralise le problème de Helmholtz-Lie dans le contexte de la relativité générale.

- Le problème de Helmholtz-Lie consiste en la caractérisation commune des géométries euclidienne et non-euclidiennes. Il est donc restreint à des variétés métriques *homogènes*, i.e. dont la mesure de courbure est constante,
- Le problème de l'espace (au sens de WEYL) consiste en la caractérisation commune des variétés pythagoriciennes dans l'infinitésimal, celles-ci n'étant pas supposées homogènes.

Troisième partie : lectures philosophiques de l'*Habilitationsvotrag* et positions philosophiques de Weyl.

Textes de référence :

- *Raum, Zeit, Materie*
- « Reine Infinitesimalgeometrie »,
- « Das Raumproblem »,
- *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (§ 12 et 18)

Troisième partie : lectures philosophiques de l'*Habilitationsvotrag* et positions philosophiques de Weyl.

Textes de référence :

- *Raum, Zeit, Materie*
- « Reine Infinitesimalgeometrie »,
- « Das Raumproblem »,
- *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (§ 12 et 18)

Notre objectif est triple :

(i) dégager les lectures philosophiques que Weyl fait de l'*Hv*,

(ii) les rapporter aux positions philosophiques qu'il défend entre 1916 et 1923,

(iii) cerner les relations entre ses positions philosophiques et sa pratique des mathématiques,

3.1. Le rapport à la théorie kantienne de l'espace.

Pour WEYL, l'*Hv* constitue un *dépassement* de la théorie kantienne de l'espace.

3.1. Le rapport à la théorie kantienne de l'espace.

Pour WEYL, l'*Hv* constitue un *dépassement* de la théorie kantienne de l'espace.

Dans une perspective kantienne, l'espace est

(a) une intuition pure (donc ni un concept, ni une réalité en soi)

(b) une forme indépendante de la matière des phénomènes

(c) représenté nécessairement comme une grandeur *infinie* donnée.

3.1. Le rapport à la théorie kantienne de l'espace.

Pour WEYL, l'*Hv* constitue un *dépassement* de la théorie kantienne de l'espace.

Dans une perspective kantienne, l'espace est

(a) une intuition pure (donc ni un concept, ni une réalité en soi)

(b) une forme indépendante de la matière des phénomènes

(c) représenté nécessairement comme une grandeur *infinie* donnée.

La distinction riemannienne entre l'*infini* et l'*illimité* permet de critiquer le troisième item.

Selon WEYL le second item implique que l'espace est *homogène* chez Kant. WEYL s'appuie sur la fin de l'*Hv* pour critiquer cet argument : l'espace peut ne pas être homogène. Sa *structure métrique* dépend alors de forces agissantes en son sein.

Au début de « Reine Infinitesimalgeometrie », WEYL affirme :

« La métrique n'est pas une propriété de l'univers en soi ; l'espace-temps en tant que forme des phénomènes est davantage un continuum quadridimensionnel complètement amorphe au sens de l'analysis situs, en revanche la métrique exprime quelque chose de réel, qui existe dans l'univers, qui exerce des effets physiques sur la matière via les forces centrifuge et gravitationnelle ; inversement, l'état [de l'univers] est assujetti à des lois de la nature et il est conditionné par la répartition et la constitution de la matière ».[RI, p. 385.]

- Weyl se réfère à la théorie einsteinienne de la gravitation (qui confirmerait la seconde hypothèse de Riemann)
- il établit une ligne de démarcation entre la structure topologique et la structure métrique de l'espace
- seule la structure topologique de l'espace est indépendante de la matière des phénomènes.

- WEYL se réfère à la théorie einsteinienne de la gravitation (qui confirmerait la seconde hypothèse de RIEMANN)
- il établit une ligne de démarcation entre la structure TOPOLOGIQUE et la structure MÉTRIQUE de l'espace
- seule la structure topologique de l'espace est indépendante de la matière des phénomènes.

WEYL s'appuie donc sur l'*Hv* et la relativité générale pour

(a) repenser la relation entre « l'espace » et la matière,

(b) déplacer la frontière entre la *forme* et la *matière* des phénomènes tracée par le kantisme.

Ces réflexions philosophiques se modifient en fonction des lectures mathématiciennes de l'*Hv* :

Ces réflexions philosophiques se modifient en fonction des lectures mathématiciennes de l'*Hv* :

(a) Dans [RI], WEYL se fonde sur la distinction *continuum amorphe* / *variété métrique* pour montrer que seules les propriétés topologiques de l'espace sont indépendantes de la matière des phénomènes.

Ces réflexions philosophiques se modifient en fonction des lectures mathématiciennes de l'*Hv* :

(a) Dans [RI], WEYL se fonde sur la distinction *continuum amorphe* / *variété métrique* pour montrer que seules les propriétés topologiques de l'espace sont indépendantes de la matière des phénomènes.

(b) Dans [RP], WEYL montre que la *nature* de la métrique de l'univers doit *a priori* être pythagoricienne dans l'infinitésimal.

La *nature* de la métrique est donc indépendante de la matière des phénomènes.

WEYL rectifie donc les thèses philosophiques qu'il avait avancées dans RI lorsqu'il résout le problème de l'espace :

« Il n'est pas vrai de dire que l'espace ou l'univers considéré indépendamment de tout contenu matériel est purement et simplement une variété continue amorphe au sens de l'analysis situs ; la nature de la métrique le caractérise en propre ; seule l'orientation mutuelle des métriques en différents points est contingente, a posteriori et dépendante d'un contenu matériel ». (« Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Massbestimmung » (1922), p. 117.)

WEYL fait la synthèse de ses réflexions sur l'espace dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* : la structure *a priori* de l'espace-temps enveloppe

- ses propriétés topologiques
- la nature de la métrique

Preuve qu'il est impossible de comprendre ses POSITIONS PHILOSOPHIQUES sans les rapporter à sa PRATIQUE DES MATHÉMATIQUES.

WEYL fait la synthèse de ses réflexions sur l'espace dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* : la structure *a priori* de l'espace-temps enveloppe

- ses propriétés topologiques
- la nature de la métrique

Preuve qu'il est impossible de comprendre ses POSITIONS PHILOSOPHIQUES sans les rapporter à sa PRATIQUE DES MATHÉMATIQUES.

La réciproque est vraie : les philosophies qu'il s'approprie ont une incidence sur les objectifs physico-mathématiques qu'il vise.

(a) La théorie fichtéenne de la connaissance transparaît dans « Reine Infinitesimalgeometrie »

(b) La phénoménologie de HUSSERL est mentionnée dans le § de *RZM* consacré au problème de l'espace.

3.2. Philosophie fichtéenne et « spéculation » en physique.

WEYL n'ambitionne pas de construire un *système* philosophique cohérent. Il s'approprie *des* philosophies qui ne sont pas forcément compatibles entre elles.

- En 1916, il rencontre F. Medicus à l'ETH. Ce dernier publie alors les œuvres complètes de FICHTE.
- A suivre E. Scholz, WEYL est alors marqué par la conception fichtéenne de l'espace et non pas seulement par la phénoménologie de HUSSERL.

Référence : FICHTE, *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (1795), § 4.

(i) FICHTE envisage l'espace dans l'infiniment petit

Référence : Fichte, *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (1795), § 4.

(i) Fichte envisage l'espace dans l'infiniment petit

La plus petite partie de l'espace jusqu'à l'infiniment petit est toujours un espace, quelque chose qui complète la continuité et non pas un simple point ou la limite entre des lieux déterminés de l'espace

Référence : Fichte, *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (1795), § 4.

(i) Fichte envisage l'espace dans l'infiniment petit

La plus petite partie de l'espace jusqu'à l'infiniment petit est toujours un espace, quelque chose qui complète la continuité et non pas un simple point ou la limite entre des lieux déterminés de l'espace

(ii) L'espace est déterminé par des « forces » (conception *dynamique* de l'espace).

Référence : FICHTE, *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (1795), § 4.

(i) FICHTE envisage l'espace dans l'infiniment petit

La plus petite partie de l'espace jusqu'à l'infiniment petit est toujours un espace, quelque chose qui complète la continuité et non pas un simple point ou la limite entre des lieux déterminés de l'espace

(ii) L'espace est déterminé par des « forces » (conception *dynamique* de l'espace).

(iii) Pour FICHTE l'espace n'est pas une forme indépendante de son contenu matériel.

L'idéalisme fichtéen transparaît dans les arguments spéculatifs de WEYL au début de « Reine Infinitesimalgeometrie »,

« Alors que je libérais la géométrie riemannienne — qui prétend pourtant être une pure « géométrie de contact » — de l'une de ses inconséquences tenaces, en rejetant le dernier élément de « géométrie à distance » qu'elle comportait du fait de son passé euclidien, je parvins à une métrique d'univers à partir de laquelle on peut déduire non seulement les effets gravitationnels, mais encore les effets électromagnétiques, bref une métrique qui, comme on peut le supposer à bon droit, rend raison de tous les processus physiques. D'après cette théorie, tout le réel effectif (das Wirkliche) qui se présente dans l'univers est une manifestation de cette métrique d'univers ; les concepts physiques ne sont rien d'autre que ceux de la géométrie ». (WEYL, « Reine Infinitesimalgeometrie », p. 385.)

(i) WEYL accorde une priorité logique à la géométrie sur la physique. Il tire directement des conséquences empiriques à partir d'une construction mathématique établie *a priori*.

(ii) Les termes « réel effectif » — qui renvoie à une conception *dynamique* de la réalité — ou encore « manifestation » relèvent d'un vocabulaire qui fait penser à l'idéalisme fichtéen.

(iii) Il pense que les interactions électromagnétiques et gravitationnelles rendent entièrement compte du réel physique. C'est là une *pétition de principe*.

Il y a donc une série de points de coïncidence entre :

(a) les tentatives de WEYL pour généraliser la géométrie riemannienne,

(b) sa démarche très spéculative pour parvenir à une théorie unifiée des champs,

(c) son intérêt pour la théorie fichtéenne de la connaissance dont il emprunte certains concepts, voire même l'écriture philosophique.

3.3. phénoménologie et problème de l'espace.

A partir de 1920-1921, WEYL se défait de la référence à l'idéalisme fichtéen.

Certains passages de *Raum, Zeit, Materie* (4e édition, 1921) renvoient explicitement à la phénoménologie de HUSSERL. On les trouve

- dans la préface
- à la fin § 18 qui est consacré à la résolution du problème de l'espace

Dans sa correspondance avec HUSSERL, WEYL considère le Raumproblem dans le prolongement de la phénoménologie entendue comme *science des essences*.

Dans sa correspondance avec Husserl, Weyl considère le Raumproblem dans le prolongement de la phénoménologie entendue comme *science des essences*.

- La phénoménologie est définie par Husserl comme recherche d'un noyau invariant de *sens* qui doit pouvoir caractériser tout existant visé par une conscience.

Dans sa correspondance avec Husserl, Weyl considère le Raumproblem dans le prolongement de la phénoménologie entendue comme *science des essences*.

- La phénoménologie est définie par Husserl comme recherche d'un noyau invariant de *sens* qui doit pouvoir caractériser tout existant visé par une conscience.
- Précisément, la nature pythagoricienne de l'espace dans l'infinitésimal caractérise l'espace en son essence selon Weyl.

WEYL corrèle donc un problème mathématique à une difficulté d'ordre philosophique :

« L'exemple de l'espace est très instructif pour éclaircir cette question qui nous paraît décisive au point de vue phénoménologique : jusqu'à quel point la démarcation des entités qui surgissent dans la conscience, exprime-t-elle une structure intrinsèque du donné lui-même et jusqu'à quel point n'est-elle qu'une simple convention ». (*RZM*, p. 128.)

Il mesure alors toute la pertinence de la démarche phénoménologique : elle va dans le sens de ses questionnements scientifiques.

WEYL corrèle donc un problème mathématique à une difficulté d'ordre philosophique :

« L'exemple de l'espace est très instructif pour éclaircir cette question qui nous paraît décisive au point de vue phénoménologique : jusqu'à quel point la démarcation des entités qui surgissent dans la conscience, exprime-t-elle une structure intrinsèque du donné lui-même et jusqu'à quel point n'est-elle qu'une simple convention ». (*RZM*, p. 128.)

Il mesure alors toute la pertinence de la démarche phénoménologique : elle va dans le sens de ses questionnements scientifiques.

Réciproquement, la résolution du problème de l'espace permet de distinguer les propriétés constitutives de son essence et celles qui peuvent être librement formulées à titre de conventions.

Conclusion : positions philosophiques / pratique des mathématiques chez WEYL

(a) Les positions philosophiques de WEYL doivent être situées à l'année près et elles ne forment pas système.

Conclusion : positions philosophiques / pratique des mathématiques chez WEYL

(a) Les positions philosophiques de WEYL doivent être situées à l'année près et elles ne forment pas système.

(b) Elles ne conditionnent pas unilatéralement sa pratique scientifique :

ce n'est pas parce que WEYL adhère aux thèses intuitionnistes de Brouwer en 1921 que sa pratique des mathématiques est conforme aux normes intuitionnistes.

Conclusion : positions philosophiques / pratique des mathématiques chez Weyl

(a) Les positions philosophiques de Weyl doivent être situées à l'année près et elles ne forment pas système.

(b) Elles ne conditionnent pas unilatéralement sa pratique scientifique :

ce n'est pas parce que Weyl adhère aux thèses intuitionnistes de Brouwer en 1921 que sa pratique des mathématiques est conforme aux normes intuitionnistes.

(c) Il y a néanmoins corrélation entre ses positions philosophiques et sa pratique scientifique.

- Weyl se distancie de l'idéalisme fichtéen à mesure qu'il reconnaît que sa théorie unifiée des champs échoue
- le « Raumproblem » se situe à l'intersection entre un problème mathématique et une difficulté philosophique empruntée à la phénoménologie.

Ces corrélations se retrouvent dans l'écriture même de Weyl.